数式処理システムにおける知的対話環境の改善(数式処理と数学研究への応用)

AUTHOR(S):

対馬, 勝英

CITATION:

対馬, 勝英. 数式処理システムにおける知的対話環境の改善(数式処理と数学研究への応用). 数理解析研究所講究録 1985, 551: 116-135

ISSUE DATE:

1985-02

URL:

http://hdl.handle.net/2433/98895

数理解析研究所講究録
551巻 1985年 116-135

数式処理システムにおける知的対話環境の改善

大阪電気通信大学工学部

対馬勝英（ Kathuhide Thushima ）

1．序

数理科学者のパーソナルな研究ツールとして、数式処理システムの構築を行うことは、筆者の永年の夢であった。

本論文は、それを行うために必要な幾つかの基本的アイデアについて述べ、そのアイデアに基づいたシステム構築の報告を行う。

また既に文献1に詳しく述べた様に、数式処理システムの上に推論機構を構築することで、数理的，物理的な問題解決を行うことはチャレンヂングな試みである。本論文に展開した幾つかアイデアは、最終的には『空海』と呼ばれる物理学上の法則の認知，発見システムのサブモジュールの位置を占めるものである。

2．SDIF

REDUCE，mu－MATH　等の数式処理システムは、整式を扱うことに主眼を置いて設計されており，オペレータ，微係数などの直接的な取扱いは行えない。例えば、

$$\frac{d}{dx}(xu + u_x) = u + xu_x + u_{xx} \qquad 1)$$

の表記法をそのままでは、数式処理システム上では扱えない。線型，非線型の微分方程式の数理的構造を調べるためには、u u_x，u_{xx}等の微係数がシステム上では扱え、且つ生成されることが必要である。

また、1）の形での表記を保ちつつ変換，関数変換を実行する機能が必要とされる。

微係数を直接扱うこのアルゴリスムは、通常の数式微分パッケヂDIFを一部手直しすることで容易に実現できる。このアルゴリスムを『ＳＤＩＦ』と名付けた。（Symbolic Diff.）

以下にＳＤＩＦの基本部分のリストを示す。

```
FUNCTION SDIF  (EX1 INDET)
  WHEN EX1 = INDET 1 EXIT
  WHEN NUMBER (EX1) 0 EXIT
  WHEN ATOM (EX1) CHPL (EX1 INDET) EXIT
```

{

```
FUNCTION CHPL (EEX1 EEX2)
  EVAL (COMPRESS (LIST (EEX1 EEX2)))
ENDFUN$
```

筆者は、　ｍｕ－ＭＡＴＨ　を拡張して種々の機能を拡張，付加する試みを行ったが、付録4にその概要を示した。

この拡張は

ａ）ＲＥＤＵＣＥの持つ機能の付加

ｂ）特殊な機能

ｃ）環境としてのツール

ｄ）ＳＤＩＦ

の４つに分けられる。現存する数式処理システムは『環境』としての対話能力に弱点を持つ。この強化をはかったものがｃ）であるが、これの発展については展望の項を見られたい。ｂ）は特殊なものであり、ＯＥＣＵ－ＭＡＴＨの特徴の一つ

となっている。

第6行に見られる様に、文字列のｃｏｍｐｒｅｓｓにより、システム内部ではU, UX 等のCompressした文字列がそのまま生成され、また認知される構造をとっている。

実行例を以下に示す。

```
?SDIF (U*X, X) ;
ⓐ U+UX*X
?SDIF (A*UX+UXX, X) ;
ⓐ A*UXX+UXXX
?SDIF (2*UX+UXX, Y) ;
ⓐ 2*UXY+UXXY
```

ＳＤＩＦ アルゴリスムを利用すると、従来の解析的な手法（アルゴリスム）が、数式処理システム上でそのままの形で実現でき、整式のみしか扱えぬためにアルゴリスムを整式向けに変換する煩わしさより解放される。一例として、微分方程式の巾級数解を『ＳＤＩＦ』を用いて求めてみよう。

3．微分方程式の巾級数解

$$u'' = f(x, u, u') \qquad 2)$$

のあるとき、その巾級数解は

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad 3)$$

である.

```
KAI (-U, 11, X0, U0, UX0)
(U0 - U0*X^2/2 + U0*X^4/24 - U0*X^6/720 + U0*X^8/40320 - U0*X^
10/3628800 + UX0*X - UX0*X^3/6 + UX0*X^5/120 - UX0*X^7/5040 +
UX0*X^9/362880)
```

(1図) $\frac{d^2u}{dx^2} = -u$ の巾級数解

SDIFアルゴリスムでは $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, ... が $u, ux, uxx, \cdots$ を用いて表される。2）と5），6）等を用いると、3）は $u\phi$（$u(0)$のこと），$ux\phi$ ，x のみを用いた整式となり、記号係数の巾級数を得る。$u\phi$，$ux\phi$に数値を代入すると、数値係数の巾級数となる。これの実行例を1図に示した。（mu-MATH版を用いたシステムの例である。）

この巾級数を求めるアルゴリスムは、2）から6）の整式をそのまま記述することにより得られる。この様に、数式処理システムを用いるための特別な「発想の転換」（アルゴリスムの変換）を必要としない点に、ＳＤＩＦの長所がある。

なお、作成したパッケヂ『ＳＯＬ』は、任意の階数の非線型常微分方程式に対しても巾級数解を生成できる。また、初期条件を整式としても数値としても設定できる。

u が既知である場合には、u ，ux，uxx等を具体的に評価する必要の生じることがある。ＯＥＣＵ－ＭＡＴＨでは例えば

```
? U:X*X+3*X*Y ;
? A:GDIF(UX) ;
```

により、uxの具体的な整式としての形をＡに代入することが

できる。　　この様に整式レベルでの取扱いと微係数レベルでの取扱いを、状況に応じて使い分けることができる。

また、微分方程式の解のデータベースを作成する場合に、この記法はデータベースのコンパクトな格納と明確な認知し易い表記，迅速な探索を許す長所を持っている。

4．ＳＤＩＦの拡張

ＳＤＩＦシステムは単に微係数を扱うというレベルに止まるものでなく、付録3に示した様にオペレタを代数的に扱うレベルにまで拡張することができる。

従来の数式処理システムは１～３のレベルの機能を持つが、４～６迄の拡張を行うことで始めて数理科学者の発想のレベルに達する。

以下に６のレベルの探索を行う実行例を示す。

```
? AA:SAYOU(1+DX+DX^2,U);
@ U + UX + UXX

? OPERATOR(U ,AA);
@OP---> 1 + DX + DX^2
0

OPERATOR---->   1 + DX + DX^2
```

$(1+\frac{d}{dx}+\frac{d^2}{dx^2})u$
$u+u_x+u_{xx}$

uに何を作用さすとAA
即ち、$u+u_x+u_{xx}$になるか

そのオペレタは $1+\frac{d}{dx}+(\frac{d}{dx})^2$
である。

このオペレタ同定機能　は、多数の数式の上で数理的な探索を動的に行う際に、決定的な役割を果たす。これが、後に述べる5章の戦略Ⅰに対応する。

5．巾級数の同定

3.で述べた様に、ＳＯＬより微分方程式の解が巾級数として得られるが、これらを特定の関数に一意的に同定することは非常に難しい。また同定ができぬ場合に、似た性質を持つ関数を示唆することも容易ではない。

この問題を解決する方式として二つの戦略が考えられる。

Ⅰ）整式に対するオペレーション（微分，積分等）とその逆操作により解候補を絞りこむ。

Ⅱ）巾級数を数値化して数値的構造を見る。

Ⅰ）については現在開発中である。Ⅱ）については筆者の開発したデータ構造を認知する人工知能システムＣＳＯＬＤと基本的に同様であり、ここではⅡ）について述べる。

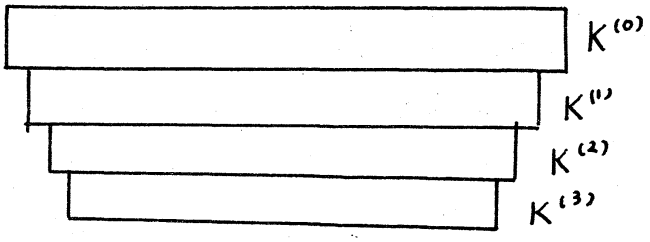
(問題)

与えられたデータ点列（x_i , d_i ）（i＝1,･･N）

に対して、これを良く記述する実験公式 $f(\alpha,\beta\cdots\gamma;x)$

を求めよ。

これを人工知能の認知能力に基づいて行う試みが『ＣＳＯＬＤ』（Cognitive System for One Line Data）である。これを知識工学的なアプローチに基づいてプロダクションシステムとして記述すると、関数同定に対する同定率が低い。システムの分解能を高めるために、純プロダクションシステムを離れ、次に述べる階差表を利用した数値的な認知方式を併用した。



階差表

正値フラグ	FPLUS (I)
負値フラグ	FMINUS (I)
単調増加フラグ	FMONINC (I)
単調現象フラグ	FMONDEC (I)
最大値位置	POSTMAX (I)
最大値	VMAX (I)
最小値位置	POSMIN (I))
最小値	VMIN (I)

} システムの用いる各階差における数値やフラグ

システムはデータ $K^{(0)}$ とその階差　表 $K^{(i)}$ を生成する。このプロセスで　表に述べるフラグ，最大値等を計算する。

（条　件）	（実験式）
Δy が一定	$y = a + bx$
$\Delta^2 y$ が一定	$y = a + bx + cx^2$

$\Delta^2 y^2$ が一定 $\longrightarrow$ $y^2 = a + bx + cx^2$

$\Delta^2(x^2 y)$ が一定 $\longrightarrow$ $y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$

$\Delta^\ell(x^\ell y)$ が一定 $\longrightarrow$ $y = a + \frac{b}{x} + \cdots + \frac{g}{x^\ell}$

$\Delta^p(f(x)\cdot g(y))$ $\longrightarrow$ ---------

により、確定的に$y(x)$を決定することができる。それを行うために、ＣＳＯＬＤは３０ケ以上の関数をもっている。[付録４]

これらは以下の様に用いられる。

Ⅰ）定数

```
if allequal (d) then FC:B
```

Ⅱ）一次関数

```
if allequal (diff (d)) then
                FC:A*X+B
```

Ⅲ）二次関数

```
if allequal (diff (diff (d)))
    then FC:A*X 2+B*X+C
```

Ⅳ）単振動

```
if TYPE=vib and allequal (p
eak (d)) then FC:A*SIN (B*X+D)
```

Ⅴ）減衰振動

```
if TYPE=vib and mondec (pea
k (d)) then FX:A*EXP (-C*X) *
SIN (B*X)
```

このCSOLDを巾級数の同定に転用する場合、巾級数を有理数として評価すれば誤差は混入しないが、巾級数をトランケートするのでその意味の誤差が混入する。このシステムを駆動するとき、allequal (d) が真か偽かはある誤差を許す形で決定される。このために用意する打切りパラメタ ε により、認知プロセスは影響を受ける。

システムが影響を受ける様に ε を変化させる戦略をとっているが、得られる結論はコンサルテーションのための示唆と受け止めるべきものである。

6. Prolog を用いた数式処理システム

付録1に、筆者の開発したProlog を用いた数式処理システムCASPに含まれるパッケヂを示した。これは CP/M 68K 上の Prolog の上に実現されたシステムであり、その詳細はソフトウェアコンファレンス[7]に発表する。

sdif がSDIFを行う関数である。simp は式の単純化関数であり、個々のケースに対応した単純化はAにおいて行われる。これを用いて作成した微分方程式の巾級数解を求めるパッケヂ difeq2 を示してある。

プログラムリストを一見して判る様に、数学的内容が非常に読み取り易い点が特徴的である。また、Prolog の特徴として関数のモジュラリティが高いので、システムの機能を高めるために一々全体を顧慮することなく、知識の付加を行える長所を持つ。また、付録2に阪大 Skpe up を用いたシステムの

リストを示した。

Prolog で記述したメリットとして、数学的表現に近い形でルールを付加し易いことと、機能の増強が一行の付加で行えるという特徴がある。しかしそれ以上に、数学上の定理証明機能を実現し易いことがある。（これはProlog で書きさえすればSDIF 上で数学的な事実の成否が問い合わせ得ることを意味しない。その様に記述すれば可能であると言うことである。）

従って、証明過程を途中に含んだ法則の探索、定理の発見と言った人工知能システムを記述することに適していると思われるが、現状の利用できるシステムにおいては、メモリー容量の限界のために満足な形で作動しにくい。（第５世代のコンピュータが待たれる所以である。）

なお、4. で述べたオペレタの探索もProlog 上では実現し易いことに注意を促したい。

７．　展望

図にＳＤＩＦを核とした数理科学研究の知的ツールとしての数式処理システムの展望をしめした。現状の数式処理システムに対する一つの問題提起と思って頂きたい。

パソコン等のスモールシステムに重点が置かれているが、ある種の技術展望の上に意識的に行ったものである。

〔　参　考　文　献　〕

1）対馬，『知的な数式処理を目指して』，数式処理通信 1－4，2－1　（ ’84 ）

2）対馬，『数式処理システムOECU－MATHの作成』，大阪電通大科学論集，18，67　（ ’82

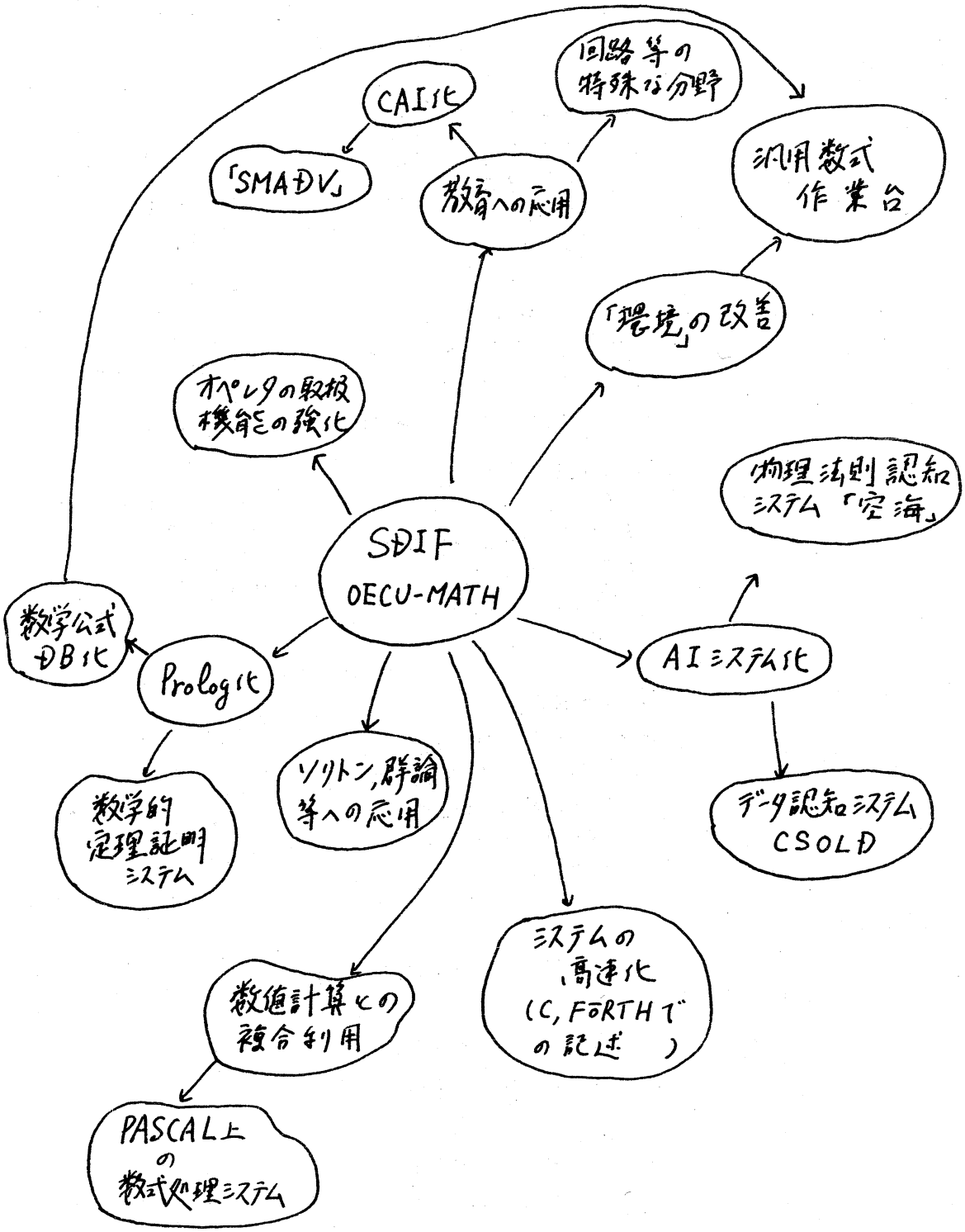
3）対馬，『数式処理システムOECU－MATHの拡張』，同 ，19　（ ’83 ）

4）対馬，『パーソナルな数式処理システム』，（’83 日本物理学会秋の分科会）

5）対馬，『人工知能的技法を用いたデータ認知システムの作成』（ ’84日本物理学会秋の分科会　）

6）対馬，『データ認知システムCSOLDの知識構造』（ ’84電気五学会関西支部連合大会 ）

7）ソフトウェアコンファレンス（'85. 3. 23 大阪科学技術センタにて開催）



[付録1] SDIFを核とした数式処理の展望

(a)	1) 配列	DM
	2) 整式係数取り出し	COEFZ
	3) 引数付変数への代入	TCOEF
	4) 因数分解	GCD
	etc.	
(b)	5) 文字列処理	CHAR
	6) ラプラス変換，逆変換	LAP, ILAP
	7) 小数表示パッケヂ	DIV
	8) 連立1次代数方程式の解放	RNRT
	etc.	
(c)	9) 対話ヒストリ機能	KDRIVER
	10) 清書機能	PRPRT
	11) 数値計算との混合処理	NCSM
	12) カナ文字利用	KANA
	13) SRトランスレータ	SR
	etc.	
(d)	14) 形式微分	SDIF
	15) 微分方程式の級数解	KAI
	16) 微分方程式の摂動解法パッケヂ	PURTB
	17) 形式微分の評価	GDIF
	18) 微分方程式DB	DEDB
	etc.	

〔 付録2 〕「OECU-MATH」の機能の分類

6 オペレタの探索
5 メタオペレタの定義
4 オペレタ代数
3 オペレタの作用
2 オペレタの定義
1 整式

〔 付録3 〕数式処理の階層

〔付録４〕ＣＳＯＬＤの言語構造

recognizer		modifier	
equal	全て等しい	pickup	抜き取り
moninc	単調増加	divide	分割
mondec	単調減少		
zero	ゼロ		
zeros	多数のゼロ		
allplus	全て正値	etc.	
allminus	全て負値	diff	階差さ
		peakp	正ピーク
		peakm	負ピーク
value			
		pos	位置読み取り
max	最大値		
min	最小値	log	
		sqr	
length	リストの長さ		

〔 付録5 〕 Shape Up上のDIFEQ2 の主要部分

```
-LIST
DIFEQ2 (*FNC,*NUM) :-
    PUTPROP (AR,1,U),
    PUTPROP (AR,2,UX),
    PUTPROP (AR,3,*FNC),
    PUTPROP (DIF,FNC,*FNC),
    PUTPROP (DIF,FNCTMP,*FNC),
    + (*NUM1,*NUM,1), ASSERTA (LOOP (*NUM1),1),
    LOOP (4).

LOOP (20).
LOOP (*N) :-
    GETPROP (DIF,FNCTMP,*FUN),
    SDIF (*FUN,X,*A),
    GETPROP (DIF,FNC,*FF),
    SIMP (*A,*AA),
    SWP (*AA,UXX,*FF,*A1),
    PUTPROP (AR,*N,*A1),
    PUTPROP (DIF,FNCTMP,*A1),
    + (*N1,*N,1),
    LOOP (*N1).


INITAR (0) :-
    RETRACTN (LOOP,1),
    RETRACTN (LOOP2,1).
INITAR (*N) :-
    PUTPROP (AR,*N,0),
    PUTPROP (AR2,*N,0),
    - (*N1,*N,1),
    INITAR (*N1).

SWP (*X,*X,*Z,*Z).
SWP (*F,*X,*Z,*F) :- ( ISSTRING (*F); ISINTEGER (*F)), !.
SWP ([*OP,*R],*X,*Z,[*OP,*L]) :- SWP (*R,*X,*Z,*L).
SWP ([*OP,*L,*R],*X,*Z,[*OP,*U,*V]) :- SWP (*L,*X,*Z,*U), SWP (*R,*X,*Z,

EVALK (*NUM,*X0,*U0,*UX0) :-
    ASSERTA (LOOP2 (*NUM,*XX,*Y,*Z),1),
    LOOP2 (0,*X0,*U0,*UX0).

LOOP2 (20,*A,*B,*C).
LOOP2 (*N,*X0,*U0,*UX0) :-
    + (*N1,*N,1),
    EVAL (*X0,*U0,*UX0,*N1),
    LOOP2 (*N1,*X0,*U0,*UX0).

EVAL (*X0,*U0,*UX0,*N) :-
    GETPROP (AR,*N,*X),
    SWP (*X,X,*X0,*X1),
    SWP (*X1,U,*U0,*X2),
    SWP (*X2,UX,*UX0,*X3),
    - (*N1,*N,1),
    FAC (*N1,*N2),
    SIMP ([TIMES,*X3,[EXPT,*N2,-1]],*G),
    PUTPROP (AR2,*N,*G).

FAC (0,1).
FAC (*N,*X) :- - (*N1,*N,1), FAC (*N1,*A1), * (*X,*A1,*N).

LOOP3 (10).
LOOP3 (*N) :-
    GETPROP (AR2,*N,*X),
    - (*NN,*N,1),
    DISP (*NN),
    PUT (32), PUT (32),
    DE (*X),
    + (*N1,*N,1),
```

15

〔 付録6 〕 PrologによるSDIFシステム

```
0000: sdif( N, X, O) :- integer( N).
0001: sdif( X, X, 1).
0002: sdif( P, X, O) :- para( P).
0003: sdif( F, X, A) :- atomic( F),compress( F, X, A).
0004:
0005: sdif (-U,X,-V) :-
0006:          sdif (U,X,V).
0007: sdif (A+B,X,U+V) :-
0008:          sdif (A,X,U),
0009:          sdif (B,X,V).
0010: sdif (A-B,X,U-V) :-
0011:          sdif (A,X,U),
0012:          sdif (B,X,V).
0013: sdif (C*U,X,C*V) :-
0014:          para (C),
0015:          sdif (U,X,V).
0016: sdif (A*B,X,A*U+B*V) :-
0017:          sdif (B,X,U),
0018:          sdif (A,X,V).
0019: sdif (A/B,X,A) ;-
0020:          sdif (U*V^-1,X,A).
0021: sdif (e^U,X,A*e^U) :-
0022:          sdif (U,X,A).
0023: sdif (U^V,X,V*W*U^V-1) :-
0024:          para (V),
0025:          sdif (U,X,W).
0026: sdif (U^V,X,U^V*(P*log (U)+V*Q*U^-1) ) :-
0027:          sdif (V,X,P),
0028:          sdif (U,X,Q).
0029: sdif (log (U),X,A*U^-1) :-
0030:          sdif (U,X,A).
0031:
0032: compress( A, B, X) :-
0033:          name( A, P),
0034:          name( B, Q),
0035:          append( P, Q, R),
0036:          name( X, R).
0037:
0038: append([], X, X).
0039: append([X|L1],L2,[X|L3]) :- append(L1,L2,L3).
0040:
0041: para(a).
0042: para(b).
```

```
0001: ?- op(10, xfy, ^ ).
0002: ?- op( 9, fx, sin).
0003: ?- op( 9, fx, cos).
0004: ?- op( 9, fx, tan).
0005: ?- op( 9, fx, log).
0006:
0007: simp( E, E) :- atomic(E), !.
0008: simp(-(-E), E) :- !.
0009: simp( E, F) :-
0010:                   E =.. [Op,Ma],
0011:                   ( name(Op, "sin");
0012:                     name(Op, "cos");
0013:                     name(Op, "tan");
0014:                     name(Op, "log") ),
0015:                   simp( Ma, Na),
0016:                   F =.. [Op, Na].
0017: simp(-E, F) :- simp(E, G), ( mera(G, F) ; F = -G), !.
0018: simp( E, F) :-
0019:                   E =.. [Op, La, Ra],
0020:                   name(Op, Opn),
0021:                   simp(La, X),
0022:                   simp(Ra, Y),
0023:                   s(Opn, X, Y, F).
0024:
0025: s("+", X, 0, X) :- !.
0026: s("+", 0, X, X) :- !.
0027: s("+", X, Y, Z) :- integer(X), integer(Y), Z is X+Y.
0028: s("+", X, X, 2*X).
0029: s("+", X, I*X, In*X) :- integer(I), In is I + 1.
0030: s("+", X, X*I, In*X) :- integer(I), In is I + 1.
0031: s("+", I*X, X, In*X) :- integer(I), In is I + 1.
0032: s("+", X*I, X, In*X) :- integer(I), In is I + 1.
0033: s("+", X, Y, X-W) :-  mera(Y, W), !.
0034: s("+", X, Y, X+Y) :- !.
0035: s("-", X, 0, X) :- !.
0036: s("-", 0, X, -X) :- !.
0037: s("-", X, Y, Z) :- integer(X), integer(Y), Z is X-Y.
0038: s("-", X, X, 0).
0039: s("-", I*X, X, In*X) :- integer(I), In is I - 1.
0040: s("-", X*I, X, In*X) :- integer(I), In is I - 1.
0041: s("-", X, I*X, In*X) :- integer(I), In is 1 - I.
0042: s("-", X, X*I, In*X) :- integer(I), In is 1 - I.
0043: s("-", X, Y, X+W) :-  mera(Y, W), !.
0044: s("-", X, Y, X-Y) :- !.
0045: s("*", X, 0, 0) :- !.
0046: s("*", 0, X, 0) :- !.
0047: s("*", 1, X, X) :- !.
0048: s("*", X, 1, X) :- !.
0049: s("*", X, Y, Z) :- integer(X), integer(Y), Z is X*Y.
0050: s("*", X, X, X^2).
0051: s("*", X, X^Y, X^Z) :- integer(Y), Z is Y + 1 ; Z = Y + 1.
0052: s("*", X^Y, X, X^Z) :- integer(Y), Z is Y + 1 ; Z = Y + 1.
0053: s("*",-1, X, W) :- mera(X, W), !.
0054: s("*", X,-1, W) :- mera(X, W), !.
0055: s("*",Im, A, S) :- integer(Im), Im < 0,
0056:                          ( inte(Im, A, S) ;
0057:                            ( mera(A, C), abs(Im, I), S = I * C )), !
```

```
0000:
0001: ?- op(10, xfy, ^ ).
0002: ?- op( 9, fx, sin).
0003: ?- op( 9, fx, cos).
0004: ?- op( 9, fx, tan).
0005: ?- op( 9, fx, log).
0006:
0007: simp( E, E) :- atomic(E), !.
0008: simp(-(-E), E) :- !.
0009: simp( E, F) :-
0010:                     E =.. [Op,Ma],
0011:                     ( name(Op, "sin");
0012:                       name(Op, "cos");
0013:                       name(Op, "tan");
0014:                       name(Op, "log") ),
0015:                     simp( Ma, Na),
0016:                     F =.. [Op, Na].
0017: simp(-E, F) :- simp(E, G), ( mera(G, F) ; F = -G), !.
0018: simp( E, F) :-
0019:                     E =.. [Op, La, Ra],
0020:                     name(Op, Opn),
0021:                     simp(La, X),
0022:                     simp(Ra, Y),
0023:                     s(Opn, X, Y, F).
0024:
0025: s("+", X, 0, X) :- !.
0026: s("+", 0, X, X) :- !.
0027: s("+", X, Y, Z) :- integer(X), integer(Y), Z is X+Y.
0028: s("+", X, X, 2*X).
0029: s("+", X, I*X, In*X) :- integer(I), In is I + 1.
0030: s("+", X, X*I, In*X) :- integer(I), In is I + 1.
0031: s("+", I*X, X, In*X) :- integer(I), In is I + 1.
0032: s("+", X*I, X, In*X) :- integer(I), In is I + 1.
0033: s("+", X, Y, X-W) :-  mera(Y, W), !.
0034: s("+", X, Y, X+Y) :- !.
0035: s("-", X, 0, X) :- !.
0036: s("-", 0, X, -X) :- !.
0037: s("-", X, Y, Z) :- integer(X), integer(Y), Z is X-Y.
0038: s("-", X, X, 0).
0039: s("-", I*X, X, In*X) :- integer(I), In is I - 1.
0040: s("-", X*I, X, In*X) :- integer(I), In is I - 1.
0041: s("-", X, I*X, In*X) :- integer(I), In is 1 - I.
0042: s("-", X, X*I, In*X) :- integer(I), In is 1 - I.
0043: s("-", X, Y, X+W) :-  mera(Y, W), !.
0044: s("-", X, Y, X-Y) :- !.
0045: s("*", X, 0, 0) :- !.
0046: s("*", 0, X, 0) :- !.
0047: s("*", 1, X, X) :- !.
0048: s("*", X, 1, X) :- !.
0049: s("*", X, Y, Z) :- integer(X), integer(Y), Z is X*Y.
0050: s("*", X, X, X^2).
0051: s("*", X, X^Y, X^Z) :- integer(Y), Z is Y + 1 ; Z = Y + 1.
0052: s("*", X^Y, X, X^Z) :- integer(Y), Z is Y + 1 ; Z = Y + 1.
0053: s("*",-1, X, W) :- mera(X, W), !.
0054: s("*", X,-1, W) :- mera(X, W), !.
0055: s("*",Im, A, S) :- integer(Im), Im < 0,
0056:                     ( inte(Im, A, S) ;
0057:                       ( mera(A, C), abs(Im, I), S = I * C )), !.
0058: s("*", A,Im, S) :- integer(Im), Im < 0,
0059:                     ( inte(Im, A, S) ;
```

```
0060:                       ( mera(A, C), abs(Im, I), S = C * I )), !.
0061: s("*", I, A, S) :- integer(I), inte( I, A, S), !.
0062: s("*", A, I, S) :- integer(I), inte( I, A, S), !.
0063: s("*", X, Y, A*B) :- mera(X, A), mera(Y, B), !.
0064: s("*", X, Y, X*Y) :- !.
0065: s("/", X, 0, Y) :-  !, fail.
0066: s("/", 0, X, 0) :- !.
0067: s("/", X, 1, X) :- !.
0068: s("/", X, Y, W) :- integer(X), integer(Y), gc(X, Y, W).
0069: s("/", X, X, 1).
0070: s("/",Im,-X, Abs/X) :- integer(Im), Im < 0, abs(Im, Abs), !.
0071: s("/",-X,Im, X/Abs) :- integer(Im), Im < 0, abs(Im, Abs), !.
0072: s("/", X, Y, A/B) :- mera(X, A), mera(Y, B), !.
0073: s("/", X, Y, X/Y) :- !.
0074: s("^", 0, X, 0) :- !.
0075: s("^", 1, X, 1) :- !.
0076: s("^", X, 1, X) :- !.
0077: s("^", X,-1, 1/X) :- !.
0078: s("^", X, Y, W) :- integer(Y), Y > 0, integer(X),
0079:                    zijou(X, Y, W), !.
0080: s("^", X, Y, X^Y).
0081:
0082: zijou(X, 0, 1) :- !.
0083: zijou(X, Y, Z) :- A is Y-1, zijou(X, A, B), Z is B*X.
0084:
0085: gc(X, Y, Z) :- (Z is X/Y, X is Y*Z, ! ;
0086:                    ( gcd(X, Y, W), A is X/W, B is Y/W, Z = A/B)).
0087: gcd(I, 0, I) :-  !.
0088: gcd(I, J, K) :- R is I mod J, gcd(J, R, K).
0089:
0090: merp(-1, X, X) :- !.
0091: merp( X,-1, X) :- !.
0092: merp(Im, X, Abs*X) :- integer(Im), Im < 0, abs(Im, Abs), !.
0093: merp( X,Im, Abs*X) :- integer(Im), Im < 0, abs(Im, Abs), !.
0094: merp(-X, Y, X*Y) :- !.
0095: merp( X,-Y, X*Y) :- !.
0096: merp( X, Y, W*Y) :- X =.. [Op,La,Ra],
0097:                    ( name(Op,"*"), merp(La,Ra, W);
0098:                     ( name(Op,"/"), merb(La,Ra, W) )).
0099: merp( X, Y, X*W) :- Y =.. [Op,La,Ra],
0100:                    ( name(Op,"*"), merp(La,Ra, W);
0101:                     ( name(Op,"/"), merb(La,Ra, W) )).
0102:
0103: merb( X,-1, X) :-  !.
0104: merb(Im, X, Abs/X) :- integer(Im), Im < 0, abs(Im, Abs), !.
0105: merb( X,Im, X/Abs) :- integer(Im), Im < 0, abs(Im, Abs), !.
0106: merb(-X, Y, X/Y) :- !.
0107: Bmerb( X,-Y, X/Y) :- !.
0108: merb( X, Y, W) :- mera(X, Y, W).
0109: merb( X, Y, W/Y) :- X =.. [Op,La,Ra],
0110:                    ( name(Op,"*"), merp(La,Ra, W);
0111:                    ( name(Op,"/"), merb(La,Ra, W) )).
0112: merb( X, Y, X/W) :- Y =.. [Op,La,Ra],
0113:                    ( name(Op,"*"), merp(La,Ra, W);
0114:                    ( name(Op,"/"), merb(La,Ra, W) )).
0115:
0116: mera(Im, Abs) :- integer(Im), Im < 0, abs(Im, Abs), !.
0117: mera(-A, A) :- !.
0118: mera( X, W) :-
0119:                    X =.. [Op,La,Ra],
```

```
0120:                    ( name(Op,"*"), merp(La,Ra, W) ;
0121:                      ( name(Op,"/"), merb(La,Ra, W) )).
0122:
0123: intp( I,In,Ra, It*Ra) :- integer(In), It is I * In, !.
0124: intp( I,La,In, La*It) :- integer(In), It is I * In, !.
0125: intp( I,La,Ra, S*Ra) :-
0126:                     La =.. [Op, L, R],
0127:                     ( name(Op,"*"), intp( I, L, R, S);
0128:                       ( name(Op,"/"), intb( I, L, R, S) )).
0129: intp( I,La,Ra, La*S) :-
0130:                     Ra =.. [Op, L, R],
0131:                     ( name(Op,"*"), intp( I, L, R, S);
0132:                       ( name(Op,"/"), intb( I, L, R, S) )).
0133:
0134: intb( I,In,Ra, It/Ra) :- integer(In),
0135:                     It is I * In , !.
0136: intb( I,La,Ra, S/Ra) :-
0137:                     La =.. [Op, L, R],
0138:                     ( name(Op,"*"), intp( I, L, R, S);
0139:                       ( name(Op,"/"), intb( I, L, R, S) )).
0140:
0141: inte( I, A, S) :-
0142:                     A =.. [Op,La,Ra],
0143:                     ( name(Op,"*"), intp( I,La,Ra, S);
0144:                       ( name(Op,"/"), intb( I,La,Ra, S) )).
0145:
0146: abs(A, A) :- integer(A), A >= 0, !.
0147: abs(A, B) :- integer(A), B is 0 - A, !.
0148:
0149:
0150:
```